Chapitre 4

Matrices d'applications linéaires

Présentation

Ce PDF est le second support de cours de l'ECUE ALM du S2 : applications linéaires et matrices. Il porte sur la notion de matrices. C'est le dernier chapitre d'algèbre linéaire de ce semestre.

Il sert de substitution et/ou de complément des MiMos concernant ce même sujet. Il y a tout ce qui vous servira pour faire les TD.

Les définitions sont en violet, les théorèmes et propositions en rouges et les exemples à connaitre en bleu. La dernière partie de ce support comporte les démonstrations à connaitre sur ce thème.

Vous trouverez aussi des commentaires (remarques, warning) qu'il ne faut pas négliger.

Il y a par ailleurs quelques exemples supplémentaires et exercices fondamentaux.

Table des matières

1 Généralités 3
1.1 Définitions 3
1.2 Matrices particulières 4
1.3 Opérations sur les matrices 4
1.4 Inverse d'une matrice carrée 7
2 Matrice d'une application linéaire 8
2.1 Définitions et exemples 8
2.2 Interprétation matricielle de $v = f(u)$ 10
2.3 Matrice de $g \circ f$ 11
2.4 Matrice de la réciproque d'une application linéaire quand elle est bijective . . . 12
3 Démonstration à connaitre 13

Dans tout le chapitre, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition : matrice

Une matrice à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une application

$$A : [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Une telle application $A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$ est notée sous la forme du tableau suivant

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est le terme (ou coefficient) situé sur la i-ème ligne, j-ième colonne de la matrice.

Notations

- L'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Cas des matrices carrées : $n = p$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. On a $a_{1,2} = 3$, $a_{3,1} = 4$ par exemple.

1.2 Matrices particulières

Définitions

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Matrice nulle :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = 0$$

  On note $A = 0_{n,p}$.

- Matrice ligne :

$$n = 1 \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$$

- Matrice colonne :

$$p = 1 \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- Cas des matrices carrées $n = p$.
  - Si $\forall\ i \neq j$, $a_{i,j} = 0$, on dit que A est une matrice diagonale.

    Si, de plus, $\forall\ i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = 1$, A s'appelle **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On la note I_n.
  - A est dite triangulaire supérieure si et seulement si $\forall\ (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2$,

$$(i > j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0)$$

  - A est dite triangulaire inférieure si et seulement si $\forall\ (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2$,

$$(i < j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0)$$

Exemples

1- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne.

2- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

3- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité de taille 3.

1.3 Opérations sur les matrices

Définitions

- On appelle addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la loi interne $+$ définie par

$$\forall\ A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall\ B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

- On appelle multiplication par un scalaire la loi externe définie par

$$\forall\, A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha\, A = (\alpha\, a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Exemple

Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 44 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ alors,

$$A + 3B = \begin{pmatrix} 28 & 4 \\ 6 & 133 \\ 17 & -16 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définitions : addition et multiplication externe

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont le (i,j)-ème terme vaut 1 et tous les autres sont nuls.

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées **matrices élémentaires**.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice élémentaire $E_{2,3}$ de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

Proposition : base canonique

- $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$.

Définitions : produit interne

Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle produit de A par B, la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \forall\, j \in [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\,.$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 & 20 \\ -2 & 18 & 46 & -80 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})\,.$$



- On ne peut faire AB que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
- Si l'on peut faire le produit AB, cela n'implique pas que l'on puisse faire le produit BA.
- Pour les matrices rectangulaires ($n \neq p$), les produits AB et BA ne sont possibles que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on n'a pas spécialement que $AB = BA$. Le produit matriciel **ne commute pas**.
- Pour les matrices carrées, c'est la même chose : $AB \neq BA$ en général.

Deux non-propriétés

Attention, le produit matriciel n'a pas toutes les mêmes propriétés qu'un produit classique. Certaines sont fausses et vont nous donner quelques soucis...



- $AB \neq BA$
- $AB = 0$ **n'implique pas** que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemples

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a

  $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $AB \neq BA$!

- Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  On a $AB = 0$ et pourtant $A \neq 0$ et $B \neq 0$!!!!

Propriétés : celles que vous pouvez utiliser !

Soit $(n,p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\forall\, C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$,

$$A(BC) = (AB)C$$

  Le produit matriciel est associatif.

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\forall\, (B,C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}))^2$,

$$A(B+C) = AB + AC\,.$$

  Le produit matriciel est distributif à gauche par rapport à l'addition.

- $\forall\, (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$ et $\forall\, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,

$$(A+B)C = AC + BC\,.$$

  Le produit matriciel est distributif à droite par rapport à l'addition.

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha\, A)B = \alpha(AB) = A(\alpha\, B)$$

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AI_n = I_nA = A$.

1.4 Inverse d'une matrice carrée

Définition : matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est inversible si et seulement si

$$\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad AB = BA = I_n$$

Si A est inversible, son inverse est unique et on le note A^{-1}.

Donc, si A est inversible,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n\,.$$

Calcul pratique de A^{-1}

On part du fait suivant : soit $(U,V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.
Alors,

$$AU = V \quad \Longleftrightarrow \quad U = A^{-1}V$$

On démarre le calcul en effectuant l'égalité $AU = V$. Il faut alors réussir à exprimer U en fonction de V par résolution d'un système linéaire. Pour cela, on utilise la méthode du pivot de Gauss.

En admettant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible, trouver A^{-1}.

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. $AU = V \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

Cela donne $\begin{pmatrix} x+4y+z \\ -y+3z \\ -x-3y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$AU = V \iff \begin{cases} x+4y+z &= X \\ -y+3z &= Y \\ -x-3y-3z &= Z \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y+z &= X \\ -y+3z &= Y \\ y-2z &= Z+X \end{cases} \quad \text{en faisant } L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

Ainsi, en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis en remontant le système, on obtient

$$AU = V \iff \begin{cases} x+4y+z &= X \\ -y+3z &= Y \\ z &= X+Y+Z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -12X-9Y-13Z \\ y &= 3X+2Y+3Z \\ z &= X+Y+Z \end{cases}$$

Ainsi, on a obtenu

$$AU = V \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12X-9Y-13Z \\ 3X+2Y+3Z \\ X+Y+Z \end{pmatrix} \iff U = \begin{pmatrix} -12 & -9 & -13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff U = A^{-1}V$$

Donc, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -9 & -13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour vérifier le résultat, on fait le produit matriciel AA^{-1} (ou $A^{-1}A$) et on trouve la matrice identité.

2 Matrice d'une application linéaire

2.1 Définitions et exemples

Pour définir une application linéaire en dimension finie au départ et à l'arrivée, nous avons son expression évidemment. Cependant, elle n'est pas forcément utile. Seule la donnée des images d'une base de départ va suffire pour déterminer entièrement l'application linéaire. Ces données vont par ailleurs, pouvoir être synthétisées par un tableau de nombres, c'est-à-dire une matrice.

Commençons par un exemple : considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. On suppose connues les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$f((1,0,0)) = (1,2),\ f((0,1,0)) = (-1,6) \text{ et } f((0,0,1)) = (0,-2)$$

Ces trois données nous suffisent pour trouver l'image par f de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$:

En effet, $\forall\, u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $u = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$. f étant linéaire, on a alors :

$$f(u) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) = x(1,2) + y(-1,6) + z(0,-2) = (x-y, 2x+6y-2z)$$

On a donc $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x+6y-2z) \end{cases}$.



Nous avons choisi ici la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les calculs y étant très simples. Cependant, nous aurions pu choisir n'importe quelle autre base de $\mathbb{R}^3$.

Retour au cours

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F.

Soit $u \in E$.
Alors,

$$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \quad \text{tel que} \quad u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$$

Définition : matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

La matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ s'appelle matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$, considérons $u = (2, 1)$.

Soient $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_2 = ((1, 1), (1, 0))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $u = 2(1, 0) + 1(0, 1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $u = 1(1, 1) + 1(1, 0)$.

(Retour au cours et à notre contexte !) Considérons à présent $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a alors

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j)$$

f est donc entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $f(e_j) \in F$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

D'où,

$$\exists ! (a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \varepsilon_i$$

Définition : matrice d'une application linéaire

On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base $\mathcal{B}'$ à l'arrivée, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

C'est donc une matrice à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \varepsilon_i$$

Dans la cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ se note plutôt $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemples

1. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

   On sait alors que $F(1) = 1 - 3X + 6X^2$, $F(X) = -1 + 5X^2$ et $F(X^2) = 2 + X$. À partir de ces informations, on peut alors calculer l'image par F de n'importe quel polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Exemple : par linéarité, $F(2X + 3) = 2F(X) + 3F(1) = 2(-1 + 5X^2) + 3(1 - 3X + 6X^2) = 28X^2 - 9X + 1$.

2. Soit l'application linéaire f définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2x + 4y, -3y) \end{array}$

   Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   On a $f(e_1) = f((1, 0)) = (1, 2, 0) = 1\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3$. Nous venons de trouver la première colonne de la matrice ! On fait de même pour la deuxième colonne.

   On trouve : $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Soit l'application linéaire g définie par $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 7y, -x + y) \end{array}$.

   Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   En procédant comme pour f, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Changeons de base : soit $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 2)$ une base de $\mathbb{R}^2$.

   On a $g(u_1) = (8, 0) = 16(1, 1) - 8(1, 2) = 16u_1 - 8u_2$. (On peut s'aider d'un système pour trouver 16 et -2 en supposant que $(8, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$).

   De même, $g(u_2) = (15, 1) = 29(1, 1) - 14(1, 2) = 29u_1 - 14u_2$

   Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g) = \begin{pmatrix} 16 & 29 \\ -8 & -14 \end{pmatrix}$

4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.
   Alors,
   $$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$$

2.2 Interprétation matricielle de $v = f(u)$

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie avec $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

Soient $u \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors,
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

C'est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemples

1. Reprenons l'application linéaire f précédente dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

   On sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+4y \\ -3y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u))$.

   Dans cet exemple, on a « l'impression d'écrire en colonne ce qu'on avait en ligne ». C'est pour cela, que parfois, il y a des abus d'écriture : on ne fait pas de distinction entre le vecteur u et ses coordonnées. Cela est spécifique au fait qu'on a travaillé ici dans les bases canoniques.

2. Prenons un exemple hors base canonique.

   Considérons $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X + 1, (X - 1)^2)$ une base de F.

   On suppose que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = A$

   Soit $u = (4, 6) \in \mathbb{R}^2$. Trouvons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

   Comme $u = 1(1, 2) + 1(3, 4)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$. On calcule AU.

   On trouve $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $f(u) = 0 \times 1 + 1 \times (X + 1) - 2 \times (X - 1)^2 = -2X^2 + 5X - 1$.

2.3 Matrice de $g \circ f$

Exemple

Considérons les applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, x, -x + y) \end{array}$$

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est bien définie. Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$g \circ f(u) = g((x+y, x-y)) = ((x+y) + 2(x-y), x+y, -(x+y) + (x-y)) = (3x - y, x + y, -2y))$$

On en déduit que $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, x+y, -2y) \end{array}$.

D'où,

$$C = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C = BA$.

On aurait donc $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \times \text{Mat}(f)$?? 😮

Proposition

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-ev de dimension finie avec $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

2.4 Matrice de la réciproque d'une application linéaire quand elle est bijective

Exemple

Considérons l'application linéaire suivante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-4y) \end{array}$.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

De plus, il est facile de voir que $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On en déduit que f est injective et par le théorème du rang, on obtient f surjective. Donc, f est bijective.

Pour trouver l'expression de f^{-1}, on utilise le fait que $v = f(u) \iff v = f(u)$: prenons $u = (x, y)$ et $v = (X, Y)$. On est amené à résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4 & = & X \\ x - 4y & = & Y \end{array} \right.$ (Ah c'est comme quand on fait $AU = V$) 😅

Après calculs, on a $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{5}X + \frac{1}{10}Y \\ y & = & \frac{1}{5}X - \frac{1}{5}Y \end{array} \right.$, ainsi $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{10}y, \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right) \end{array}$.

Par conséquent, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

On remarque alors que $AB = I$ donc $B = A^{-1}$.

On aurait donc $\text{Mat}(f^{-1}) = (\text{Mat}(f))^{-1}$?? 😮

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de même dimension.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Alors,

$$f \quad \text{bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad \text{inversible}$$

Dans ce cas, on a

$$\left(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$$

3 Démonstration à connaitre

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F.

Soient $u \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Remarques :

1. En notant $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u))$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\text{Mat}_{B'}\left(f(u)\right) = \text{Mat}_{B,B'}(f) \times \text{Mat}_{B}(u) \Longleftrightarrow V = AU$$

2. $A = \text{Mat}_{B,B'}(f) = (a_{i,j})$. Les colonnes de A sont formées des coordonnées des vecteurs $f(e_j)$ dans la base B' :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \varepsilon_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \varepsilon_n \end{array}$$

   ce qui revient à dire $\forall\, j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = a_{1,j}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n,j}\varepsilon_n$.

3. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve :

Soit $u \in E$.
• Comme B est une base de E :

$$\exists!\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$$

On a alors $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

• Par linéarité de f, on obtient :

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_p f(e_p) \\ &= \lambda_1 \left(a_{1,1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n,1}\varepsilon_n\right) + \ldots + \lambda_p \left(a_{1,p}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n,p}\varepsilon_n\right) \\ &= \left(\lambda_1 a_{1,1} + \ldots + \lambda_p a_{1,p}\right)\varepsilon_1 + \ldots + \left(\lambda_1 a_{n,1} + \ldots + \lambda_p a_{n,p}\right)\varepsilon_n \end{aligned}$$

On en déduit que $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} + \ldots + \lambda_p a_{1,p} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \ldots + \lambda_p a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = AU$

Et voilà, l'algèbre linéaire est fini pour ce semestre !



Ou alors, plutôt ?

